群と位相（横田一郎）

使用しているのは第 17 版第 17 刷.

1

射影空間と古典群の定義

■記号等

- $\mathfrak{J}(n,K)$，$\mathfrak{J}_+(n,K)$．(p.51)
- $KP(n-1)=\{\,X\in M(n,K)\mid X^*=X, X^2=X, \mathrm{Tr}(X)=1\,\}$．(p.58)
  補題 27 から $X\in KP(n-1)$ は $A\in G(n,K)$ によって $X=AE_nA^*$ と表すことができる．これによって，積を導入する．すなわち，$X,Y\in KP(n-1)$ を $A,B\in G(n,K)$ を用いて $X=AE_nA^*$，$Y=BE_nB^*$ とした時，X と Y の積を $(AB)E_n(AB)^*$ とする．
- $S_d=\{\,(\xi,x)\in\mathbb{R}\times K\mid \xi(\xi-1)=|x|^2\,\}$．(p.58)

2

射影空間と古典群の位相

■記号等

- $D_{\boldsymbol{a}} \in M(n,K)$ $(\boldsymbol{a} \in {S_K}^{n-1})$：$D_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$；$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = 0$ $(\boldsymbol{x} \in K^n)$ なら $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. (p.123)

3

射影空間と古典群の胞体分割

■記号等

- $D_{(\kappa,\boldsymbol{a})} = (\delta_{ij} + (\kappa-1)a_i\overline{a}_j)_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n,\mathbb{C})$；$\boldsymbol{a} \in S^0_{\mathbb{C}}$，$\boldsymbol{a} \in S^{n-1}_{\mathbb{C}}$．(p.151)

■定理 30　$h\colon S_d \cup V_K{}^2 \to KP(2)$ は $f\colon S_d \to KP(2)$，$\varphi_2\colon V_K{}^2 \to KP(2)$ で構成される．f は $S_d \to KP(1)$ の同相写像であり（定理 28 の証明），φ_2 の制限は同相写像 $E_K{}^2 \to e^{2d} = KP(2) - KP(1)$ と，$S_K{}^1 \to KP(1)$（定理 29 の証明）である．従って，$h\colon S_d \cup V_K{}^2 \to KP(2)$ が全射であることは明らか．ここで，$p, p' \in S_d \cup V_K{}^2$ に対し，次の同値関係を定義する：

$$p \sim p' \Leftrightarrow p = p', \quad f(p) = \varphi_2(p'), \quad f(p') = \varphi_2(p).$$

$(\xi, z) \in S_d$，$(x, y) \in S_K{}^1$ として，$f(\xi, z) = \varphi_2(x, y)$ とおく．実際に計算すれば，これは $\nu_K(x, y) = (\xi, z)$ であることが分かる．すなわち，上の同値関係は

$$p \sim p' \Leftrightarrow p = p', \quad p = \nu_K(p'), \quad p' = \nu_K(p).$$

この同値関係による等化集合は $S_d \cup_\nu e^{2d}$ である．ところで，これは S_d の元を f で写したものと $S_K{}^1$ の元を h で写したものが等しければ，それらの元を同一視しているので，全単射 $\tilde{h}\colon S_d \cup_\nu e^{2d} \to KP(2)$ が誘導される．

■補題 112

準備のための写像

証明　$p_k\colon O(k) \ni A \mapsto A\boldsymbol{e}_k \in S^{k-1}$ は定理 15 の証明 (p.104) で与えられている．$h_k\colon V^{k-1} \ni \boldsymbol{x} \mapsto (-2\boldsymbol{x}\sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}, 2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1)$ は定理 27(p.136) で与えられた $e^{k-1} = S^{k-1} - e^0 = S^{k-1} - \boldsymbol{e}_k$ の特性写像で，同相写像 $h_K\colon E^{k-1} \to e^{k-1} = S^{k-1} - \boldsymbol{e}_k$ を誘導する．$\varphi_k\colon V^{k-1} \ni \boldsymbol{x} \mapsto (x_i\overline{x}_j)_{1 \le i,j \le k}$ は定理 31(p.140) で与えられた e^{k-1} の特性写像で，同相写像 $E^{k-1} \to e^{k-1}$ を誘導する．□

■定理 32

$O(n)$ の胞体分割

証明 $\mathbb{R}P(n-1)$ の胞体 $e^{k-1}=\mathbb{R}P(k-1)-\mathbb{R}P(k-2)$（定理 31，p.140）は $\mathbb{R}P(k-1)$ のうち，(n,n) 成分が 0 で無いもの．定理 25 の単射 $f\colon \mathbb{R}P(k-1)\ni X\mapsto E-2X\in O(k)$ によって e^{k-1} を写せば，$O(n)$ のうち (n,n) 成分が 1 で無いものに含まれる．すなわち，$e^{k-1}\subset O(k)-(k-1)$ である． □

■補題 127

(3) $\overline{e^3}=e^0\cup e^3={S_{\mathbb{H}}}^0=Sp(1)$

証明 $\psi_1\colon V^3\times {V_{\mathbb{H}}}^0\ni(q,0)\mapsto 1+2\sqrt{1-|q|^2}(q-\sqrt{1-|q|^2})\in Sp(1)$ によって，$\psi_1(V^3\times {V_{\mathbb{H}}}^0)=\overline{e^3}=e^0\cup e^3\subset Sp(1)={S_{\mathbb{H}}}^0$ である (補題 127(1))．$a+b\in {S_{\mathbb{H}}}^0$ $(a\in\mathbb{R},b\in V^3)$ とする．$a=1$ なら $a+b=1\in\overline{e^3}$ なので，$a\neq 1$ とする．$q=b/\sqrt{2-2a}$ とおけば，$a+b=\psi_1(q,0)\in\overline{e^3}$ である．従って，${S_{\mathbb{H}}}^0\subset\overline{e^3}$． □

四元数 $\mathbb{H}^3$ での外積.

証明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{H}^3$ は $\mathbb{H}$ 上右線型独立であるとする．

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\quad a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=0$$

を満たす $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)\in\mathbb{H}^3$ を見つけたい．

$\boldsymbol{x}$ の成分 2 つが 0 のとき．$\boldsymbol{x}=(x_1,0,0)$ とする．$y_2=y_3=0$ なら $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が線形従属となるので矛盾．$y_2=0$ なら $\boldsymbol{a}=(0,1,0)$ とする．$y_3=0$ なら $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$ とする．$y_2,y_3\neq 0$ なら $\boldsymbol{a}=(0,{y_2}^{-1},-{y_3}^{-1})$ とする．

$\boldsymbol{x}$ の成分 1 つが 0 のとき. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)$ とする. $y_3=0$ なら $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$ とする. $y_3\neq 0$ なら $a_1={x_1}^{-1}$，$a_2=-{x_2}^{-1}$，$a_3=({x_2}^{-1}y_2-{x_1}^{-1}y_1){y_3}^{-1}$ とする.

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 共に成分が非零のとき. $x_1{x_3}^{-1}-y_1{y_3}^{-1}=0$ なら $\boldsymbol{a}=({x_1}^{-1},0,-{x_3}^{-1})$ とする. $x_1{x_3}^{-1}-y_1{y_3}^{-1}\neq 0$ なら $y_3{y_1}^{-1}-x_3{x_1}^{-1}\neq 0$ となるので,

$$\begin{aligned}a_1&=a_2(y_2{y_3}^{-1}-x_2{x_3}^{-1})(x_1{x_3}^{-1}-y_1{y_3}^{-1})^{-1},\\a_3&=a_2(x_2x_1^{-1}-y_2y_1^{-1})(y_3{y_1}^{-1}-x_3{x_1}^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

とすればよい．実際，これを変形して

$$\begin{aligned}(a_1x_1+a_2x_2){x_3}^{-1}&=(a_1y_1+a_2y_2){y_3}^{-1}\\(a_2x_2+a_3x_3)x_1^{-1}&=(a_2y_2+a_3y_3)y_1^{-1}\end{aligned}$$

となる．$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=s$，$a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=t$ とすれば，$s{x_3}^{-1}=t{y_3}^{-1}$，$sx_1^{-1}=ty_1^{-1}$ となる．$s\neq 0$ とすれば $t\neq 0$ となるので，2 つ目の両辺の逆元を取って $x_1s^{-1}=y_1t^{-1}$．1 つ目の式とかけて，$x_1{x_3}^{-1}=y_1{y_3}^{-1}$ となり矛盾．従って $s=t=0$． □

$A\in Sp(k-1)$ の構成

証明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_{\mathbb{H}}{}^{k-1}$ が（右 $\mathbb{H}$ 加群の基底として）一次独立であるとする．$W = \boldsymbol{x}\mathbb{H} + \boldsymbol{y}\mathbb{H}$ とすればこれは階数 2 の自由右 $\mathbb{H}$ 加群．まず，$A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \in \mathbb{H}^{k-1}$ の第 $3 \sim k-1$ 成分が 0 となるような $A \in Sp(k-1)$ が存在する．実際，

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{k-1}^* \end{pmatrix}$$

とした際に，$(\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるような $\boldsymbol{a}_k \in \mathbb{H}$ を選ぶことができる．$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}\}$ が正規直交系となるように選べば $A_{k-1} \in Sp(k-1)$ であり（補題 19，p.44），$A_{k-1}\boldsymbol{x}, A_{k-1}\boldsymbol{y}$ は第 $k-1$ 成分が 0 である．従って，$A_{k-1}\boldsymbol{x}, A_{k-1}\boldsymbol{y}$ は $\mathbb{H}^{k-2}$ の元とみなすことができる．上と同様にして，

$$A_{k-2} = \begin{pmatrix} A'_{k-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (A'_{k-2} \in Sp(k-2))$$

によって $A_{k-2}A_{k-1}\boldsymbol{x}, A_{k-2}A_{k-1}\boldsymbol{y}$ は第 $k-2, k-1$ 成分が 0 となる．これを繰り返せば，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる $A \in Sp(k-1)$ の存在が証明される．

$1 \leq r < k-1$ を，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の $s+1 \sim k-1$ 成分を取ったベクトルが線形従属となるような s のうち最大のものとする．$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}a + \boldsymbol{y}b$ の $r+1 \sim k-1$ が全て 0 であるような $a, b \in \mathbb{H}$ が存在する．$W_r = \boldsymbol{z}\mathbb{H}$ とすればこれは階数 1 の W の部分加群となる．あとは，$A\boldsymbol{z}$ が第 1 成分のみ非零であるように A を再構成すればよい．

$$A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 = x_1 a + y_1 b \\ z_2 = x_2 a + y_2 b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが，$z_1 = z_2 = 0$ なら $\boldsymbol{z} = 0$ となり，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が線形従属となるので矛盾．$z_2 = 0$ ならそれでよい．$z_1 = 0$ なら

$$\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} A \in Sp(k-1)$$

を改めて A とすればよい．$z_1, z_2 \neq 0$ なら

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ sz_1^{-1} & -sz_2^{-1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} A \in Sp(k-1), \quad s = \frac{1}{\sqrt{|z_1^{-1}|^2 + |z_2^{-1}|^2}}$$

を改めて A とすればよい．

$A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}$ が線形従属とすれば，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が線形従属となるので矛盾．従って $A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}$ は線形独立． $\square$

4

射影空間と古典群の基本群と被覆空間

■補題 146

$p^{-1}(h(\tau))$ が離散空間

証明 ファイバー空間の定義 (p.176) の直後に書かれているように，$x \in X$ に対し，$p^{-1}(x)$ と F は同相である． □

■補題 149

$u(I) \subset X$ がコンパクト

証明 I は $\mathbb{R}$ の有界閉集合なのでコンパクト．連続な全射 $u\colon I \twoheadrightarrow u(I)$ に対し命題 59 を適用すればよい． □

v_i が全単射

証明 まず $p^{-1}(x_{i+1}) \cap U(b_{i\lambda})$ が唯 1 点からなることを示す．p の制限によって $U(b_{i\lambda})$ と $U(x_i) \ni x_{i+1}$ は同相なので $p^{-1}(x_{i+1}) \cap U(b_{i\lambda}) \neq \varnothing$．$b, b' \in p^{-1}(x_{i+1}) \cap U(b_{i\lambda})$ とする．$p(b) = p(b')$ で，p は $U(b_{i\lambda})$ 上で単射なので $b = b'$．よって，写像

$$v_i\colon p^{-1}(x_i) \ni b_{i\lambda} \mapsto p^{-1}(x_{i+1}) \cap U(b_{i\lambda}) \in p^{-1}(x_{i+1})$$

が得られる．

$x_{i+1} \in U(x_i)$ なので $p^{-1}(x_{i+1}) \subset p^{-1}(U(x_i)) = \bigcup_\lambda U(b_{i\lambda})$．したがって，全ての $b \in p^{-1}(x_{i+1})$ に対して $b \in U(b_{i\lambda})$ となる λ が存在する．よって，$v_i(b) = b$ となり，v_i は全射.

$U(b_{i\lambda}) \cap U(b_{i\mu}) = \varnothing$ なので v_i は単射. □

■命題 152

$(B', \tilde{h}, B)$ は被覆空間の性質 (3) を満たす

証明 $b \in B$, $x = p(b) \in X$ とする．

$\tilde{h}^{-1}(b) = p'^{-1}(x)$ を示す．$b' \in \tilde{h}^{-1}(b)$ とする．$b = \tilde{h}(b')$ なので $x = p(b) = p \circ \tilde{h}(b') = p'(b')$．従って $b' \in p'^{-1}(x)$ なので $\tilde{h}^{-1}(b) \subset p'^{-1}(x)$．逆に $b' \in p'^{-1}(x)$ とする．補題 150 より $b = \tilde{h}(b')$ なので $b' \in \tilde{h}^{-1}(b)$．従って $p'^{-1}(x) \subset \tilde{h}^{-1}(b)$．

$b' \in \tilde{h}^{-1}(b) = p'^{-1}(x)$ とする．標準近傍 $V \ni x, U(b) \ni b, U'(b') \ni b'$ を取る．$\tilde{h}$ の制限により $U'(b') \simeq U(b)$ となることを示す．

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[rrrr, two heads, "\tilde{h}"] \arrow[rrddd, two heads, bend right, "p'"'] & & & & B \arrow[llddd, two heads, bend left, "p"] \\
& U'(b') \arrow[lu, hook', "i'"] \arrow[rr] \arrow[rd, "\phi'"] & & U(b) \arrow[ru, hook, "i"'] \arrow[ld, "\phi"] & \\
& & V \arrow[d, hook, "j"] & & \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

標準近傍の性質より ϕ, ϕ' は同相で，$p' \circ i' = j \circ \phi'$, $p \circ i = j \circ \phi$ である．よって

$$p \circ i \circ \phi^{-1} \circ \phi' = j \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi' = j \circ \phi' = p' \circ i' = p \circ \tilde{h} \circ i'.$$

$p \circ i = j \circ \phi$ は単射なので

$$\phi^{-1} \circ \phi' = (p \circ i)^{-1} \circ p \circ i \circ \phi^{-1} \circ \phi' = (p \circ i)^{-1} \circ p \circ \tilde{h} \circ i' = i^{-1} \circ p^{-1} \circ p \circ \tilde{h} \circ i'.$$

したがって

$$i \circ \phi^{-1} \circ \phi' = p^{-1} \circ p \circ \tilde{h} \circ i' = \tilde{h} \circ i'.$$

さらに標準近傍の性質から

$$\tilde{h}^{-1}(U(b)) = p'^{-1}(V) = \bigcup_{b'_\lambda \in p'^{-1}(x)} U'(b'_\lambda) = \bigcup_{b'_\lambda \in \tilde{h}^{-1}(b)} U'(b'_\lambda).$$

□

■**命題** 155

v_1, v_2, v_3 の構成

証明 v_1, v_2 は α_*, β_* の定義から存在する．b_0, b_β を結ぶ道 v_2 に対し，$\alpha_*(b_0)$ を始点とし，pv_2 を被覆する道を v_3 とする．α_* の定義から $v_3(1) = \alpha_*(b_\beta)$．$pv_2 = pv_3$ なので，$[pv_3] = \beta$． □

$(v_1 \cdot v_3)(1) = (\alpha\beta)_*(b_0)$

証明 $\alpha = [pv_1]$, $\beta = [pv_3]$ なので $\alpha \cdot \beta \in \pi_1(X, x_0)$ の代表元として $p(v_1 \cdot v_3)$ を取れる．$(\alpha\beta)_*(b_0)$ は $v_1 \cdot v_3$ の終点なので，$(v_1 \cdot v_3)(1) = (\alpha\beta)_*(b_0)$． □

$(\alpha\beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$

証明 $(\alpha\beta)_*(b_0) = \alpha_* \circ \beta_*(b_0)$ なので，命題 152 を使うためには $p \circ (\alpha\beta)_* = p \circ \alpha_* \circ \beta_*$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

α_* の定義から，

$$p(\alpha_*(\beta_*(b))) = p(\beta_*(b)) = p(b) = p((\alpha\beta)_*(b)).$$

□

被覆写像 $p\colon B \twoheadrightarrow X$ は開写像

証明 V を B の開集合とする．$x \in p(V)$ を任意にとる．$b \in p^{-1}(x) \cap V$ とする．標準近傍 $U \ni x$, $U(b) \ni b$ を取る．$V \cap U(b)$ は $U(b)$ の開集合であり，p は $U(b)$ と U の同相写像なので，$p(V \cap U(b))$ は U の開集合．従って，$p(V \cap U(b))$ は X の開集合．$x \in p(V \cap U(b)) \subset p(V)$ なので，$p(V)$ は開集合． □

付録

■命題 182

$\ker\varphi = \{\pm E\}$

証明 $A \in \ker\varphi$ とすれば，任意の Hermite 行列 $X \in \mathfrak{J}(3, K)$ に対し $AX = XA$ となる．ここで，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $a_{23} = a_{32} = 0$．以上から，A は対角行列．

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $a_{11} = a_{22}$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $a_{11} = a_{33}$．よって，$A = aE$ $(|a|^2 = 1)$ と表せる．

$K = \mathbb{R}$ なら $a = \pm 1$．$K = \mathbb{C}$ なら $a = e^{i\theta}$.

$K = \mathbb{H}$ の場合を考える．

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $ai = ia$．$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とすれば $a_2 = a_3 = 0$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば $a_1 = a_3 = 0$．以上から $a \in \mathbb{R}$ なので $a = \pm 1$. $\square$

$\mathrm{Tr}\,\alpha(E_i) = 1$，$UE_iU^* = \alpha(E_i)$

証明 $\alpha(E_i \circ E_i) = \alpha(E_i) \circ \alpha(E_i)$ なので $\alpha(E_i)\alpha(E_i) = \alpha(E_i)$. $i \neq j$ ならば $E_iE_j = 0$ なので $\alpha(E_i)\alpha(E_j) = 0$. $E_1 + E_2 + E_3 = 1$ なので $\alpha(E_1) + \alpha(E_2) + \alpha(E_3) = 1$.

冪等行列 $\alpha(E_i)$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の張る部分空間 W_i を考えれば[*1]

$$\mathrm{Tr}\,\alpha(E_i) = \mathrm{rank}\,\alpha(E_i) = \dim W_i = 1.$$

さらに $\boldsymbol{v}_i$ の固有値は 1.

$\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ なので $\alpha(E_1)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$. よって $\boldsymbol{v}_1^*\alpha(E_1)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$. したがって

$$0 = \boldsymbol{v}_2^*\alpha(E_1)^*\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2^*\alpha(E_1)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_1.$$

同様にして $\boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$ となるので

$$U = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix} \in G(3, K).$$

したがって，

$$U^*\alpha(E_1)U = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^* \\ \boldsymbol{v}_2^* \\ \boldsymbol{v}_3^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix} = E_1.$$

よって，$UE_iU^* = \alpha(E_i)$. □

$E_i \circ {F_i}^x = 0$ および $2E_i \circ {F_j}^x = {F_j}^x$ $(i \neq j)$ を満たす ${F_i}^x \in \mathfrak{J}(3, K)$ は

$${F_1}^x = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & \bar{x} & 0\end{pmatrix}, \quad {F_2}^x = \begin{pmatrix}0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad {F_3}^x = \begin{pmatrix}0 & x & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

のみ.

[*1] 佐武線型代数 p.131–132